

# Chapitre II

## Méthode graphique

# La représentation graphique

**D**ans ce chapitre nous présentons une technique de résolution de programme linéaire à **deux** variables  $x_1$  et  $x_2$ .

**D**ans ce cas on peut utiliser une représentation graphique du programme linéaire.

**L**a représentation graphique sera utile pour acquérir une compréhension intuitive des principes de base de la programmation linéaire.

# Le problème linéaire à deux variables

La formulation canonique d'un programme linéaire à deux variables peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = a_0x_1 + b_0x_2 \\ a_1x_1 + b_1x_2 \leq c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 \leq c_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

# Le problème linéaire à deux variables

La formulation canonique d'un programme linéaire à deux variables peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

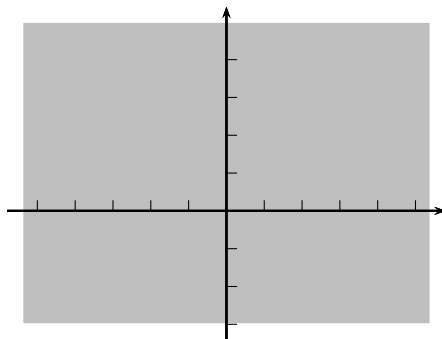
$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = a_0x_1 + b_0x_2 \\ a_1x_1 + b_1x_2 \geq c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 \geq c_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

# La construction de la région réalisable

Chaque équation :  $a_i x_1 + b_i x_2 = c_i$  (D)

définit une droite qui partage le plan en deux demi-plans  $P_1$  et  $P_2$   
d'équation :

$$(P_1) \quad a_i x_1 + b_i x_2 \geq c_i, \quad (P_2) \quad a_i x_1 + b_i x_2 \leq c_i$$

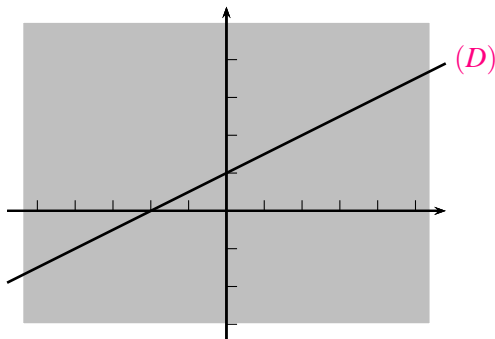


# La construction de la région réalisable

Chaque équation :  $a_i x_1 + b_i x_2 = c_i$  (D)

définit une droite qui partage le plan en deux demi-plans  $P_1$  et  $P_2$   
d'équation :

$$(P_1) \quad a_i x_1 + b_i x_2 \geq c_i, \quad (P_2) \quad a_i x_1 + b_i x_2 \leq c_i$$

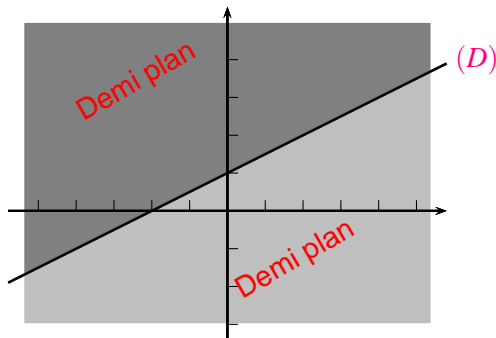


# La construction de la région réalisable

Chaque équation :  $a_i x_1 + b_i x_2 = c_i$  (D)

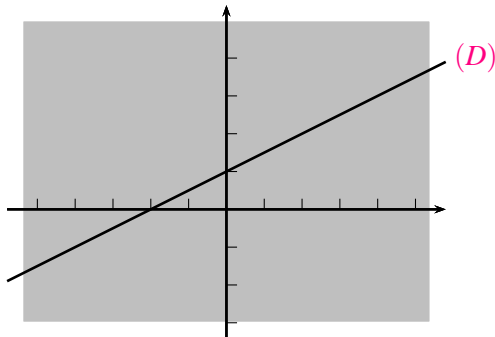
définit une droite qui partage le plan en deux demi-plans  $P_1$  et  $P_2$   
d'équation :

$$(P_1) \quad a_i x_1 + b_i x_2 \geq c_i, \quad (P_2) \quad a_i x_1 + b_i x_2 \leq c_i$$



# La construction de la région réalisable

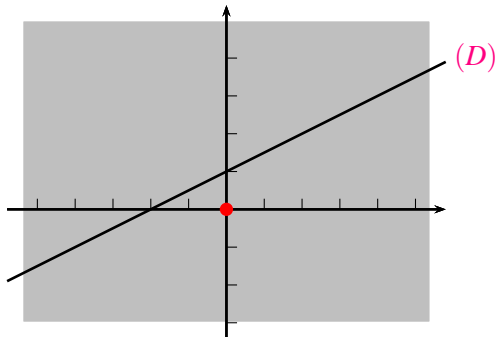
**C**haque contrainte détermine l'un des deux demi-plans ( $P_1$ ) ou ( $P_2$ ) que l'on trouvera en vérifiant si un point particulier (l'origine  $(0,0)$  par exemple) est contenu dedans ou non.





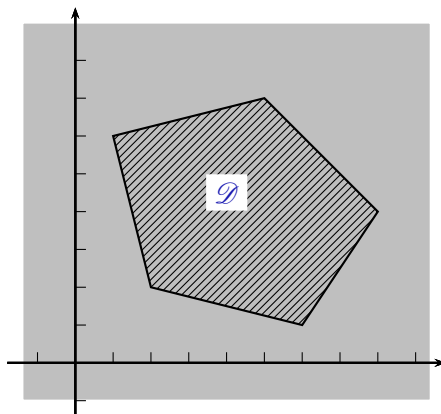
# La construction de la région réalisable

**C**haque contrainte détermine l'un des deux demi-plans ( $P_1$ ) ou ( $P_2$ ) que l'on trouvera en vérifiant si un point particulier (l'origine  $(0,0)$  par exemple) est contenu dedans ou non.



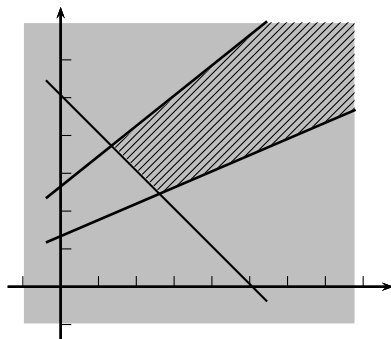
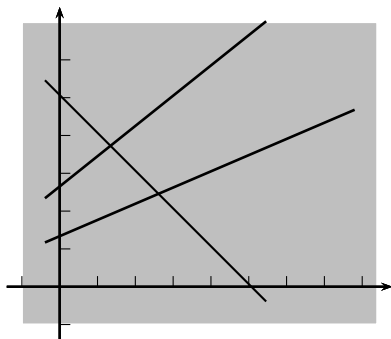
# La construction de la région réalisable

L'intersection de tous les demi-plans correspondant aux contraintes constitue l'**ensemble des points réalisables** : ce sont les solutions communes à toutes les contraintes.



# La construction de la région réalisable

Cet ensemble correspond à une région  $\mathcal{D}$  du plan et est souvent appelée **région réalisable**. Cette région est parfois vide ou non bornée.



# La recherche d'une solution optimale

Nous venons de construire la région réalisable d'un programme linéaire à deux variable. Cet ensemble contient un **nombre infini** de solutions réalisables.

Il reste à repérer, parmi ces solutions réalisables celle(s) qui donne(nt) à  $z$  **la meilleur** valeur.

# La recherche d'une solution optimale

En fixant  $z$  à une valeur  $p$  choisie arbitrairement, on obtient la droite :

$$(D_p) \quad a_0x_1 + b_0x_2 = p$$

Cette droite est appelé **droite d'iso-valeur** de fonction  $z$ . Elle représente les points du plan qui donnent à  $z$  la valeur  $p$ .

# La recherche d'une solution optimale

On s'intéresse à la famille des droites  $(D_p)$  ( $p$  paramètre). Ce sont toutes des **droites parallèles** de pente :  $-\frac{a}{b}$ , que l'on peut écrire :

$$x_2 = -\frac{a_0}{b_0}x_1 + \frac{p}{b_0} \quad (\text{si } b_0 \neq 0).$$

Ici  $y_p = \frac{p}{b_0}$  est l'ordonnée à l'origine de la droite  $(D_p)$ . Ainsi, on a :

$$\text{Si } b_0 > 0 \quad \text{alors} \quad p_1 < p_2 \iff y_{p_1} < y_{p_2}$$

$$\text{Si } b_0 < 0 \quad \text{alors} \quad p_1 < p_2 \iff y_{p_1} > y_{p_2}$$

# La recherche d'une solution optimale

On s'intéresse à la famille des droites  $(D_p)$  ( $p$  paramètre). Ce sont toutes des **droites parallèles** de pente :  $-\frac{a}{b}$ , que l'on peut écrire :

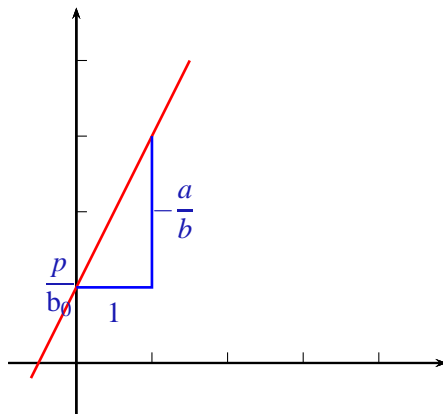
$$x_2 = -\frac{a_0}{b_0}x_1 + \frac{p}{b_0} \quad (\text{si } b_0 \neq 0).$$

Ici  $y_p = \frac{p}{b_0}$  est **l'ordonnée à l'origine** de la droite  $(D_p)$ . Ainsi, on a :

$$\text{Si } b_0 > 0 \quad \text{alors} \quad p_1 < p_2 \iff y_{p_1} < y_{p_2}$$

$$\text{Si } b_0 < 0 \quad \text{alors} \quad p_1 < p_2 \iff y_{p_1} > y_{p_2}$$

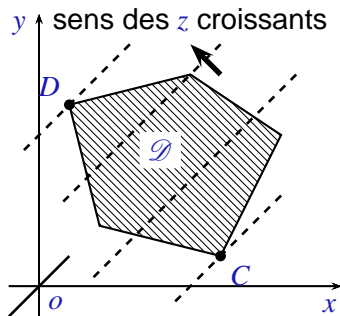
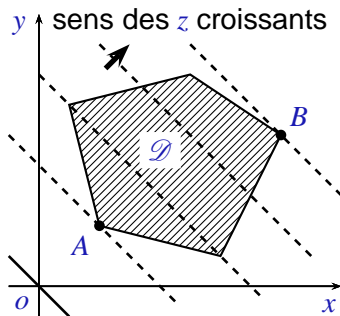
# La recherche d'une solution optimale





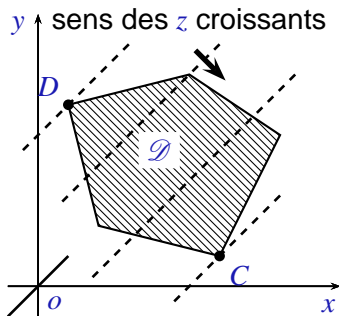
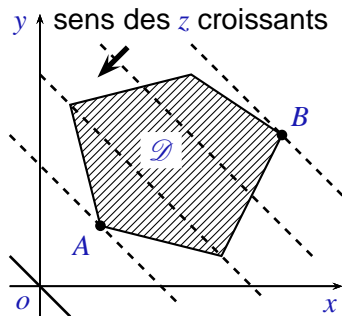
# La recherche d'une solution optimale

**Si**  $b_0 > 0$ , maximiser  $z$  revient à maximiser  $p$  et donc  $y_p$ . Donc le maximum de  $z$  est obtenu pour la droite ayant au moins un point commun avec la région réalisable et ayant une ordonnée à l'origine la plus **élevée** possible.



# La recherche d'une solution optimale

**Si**  $b_0 < 0$ , maximiser  $z$  revient à maximiser  $p$  et donc à minimiser  $y_p$ . Donc, le maximum de  $z$  est obtenu pour la droite ayant au moins un point commun avec la région réalisable et ayant une ordonnée à l'origine la plus **basse** possible.



# Remarque

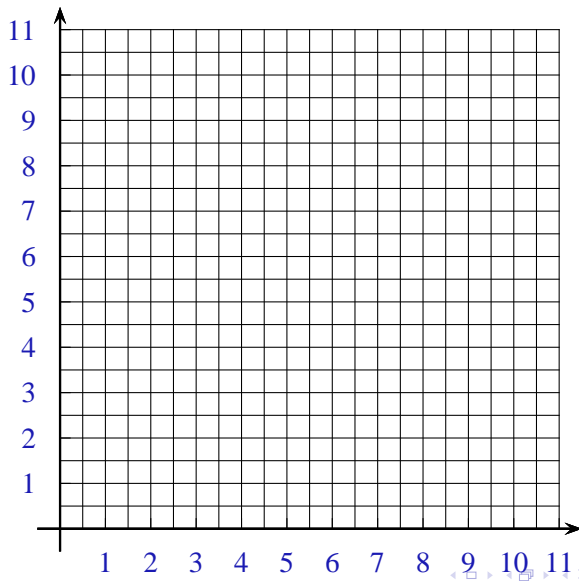
**T**ous les points sur une même droite assurent la même valeur pour  $z$ . Quand on passe d'une droite à une autre, les valeur de  $z$  varient : ils augmentent si on se déplace dans le sens du vecteur normal  $\vec{n}(a_0, b_0)$  au droites iso-valeurs : d'où la signification de la flèche indiquant le « sens des  $z$  croissants ».

# Un problème de maximisation

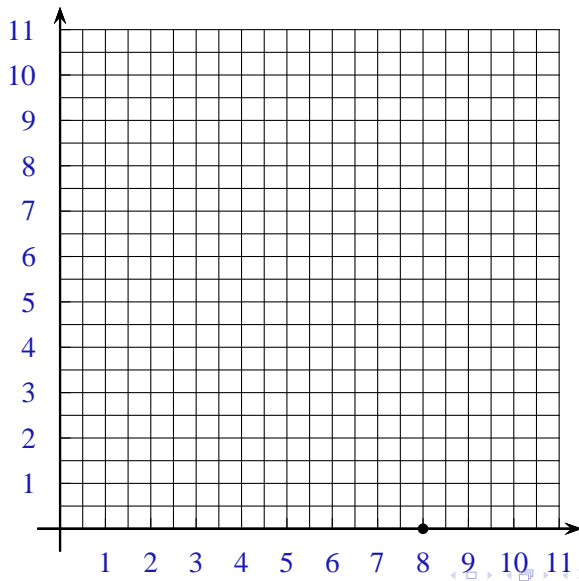
**R**eprenons le programme linéaire suivant :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 50x_1 + 60x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

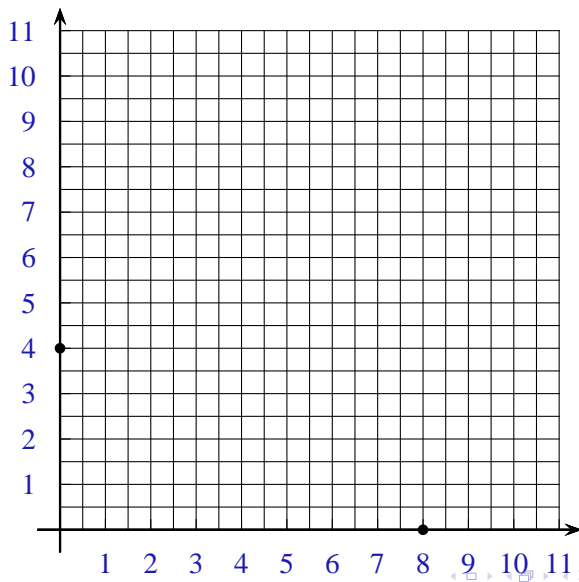
# Un problème de maximisation



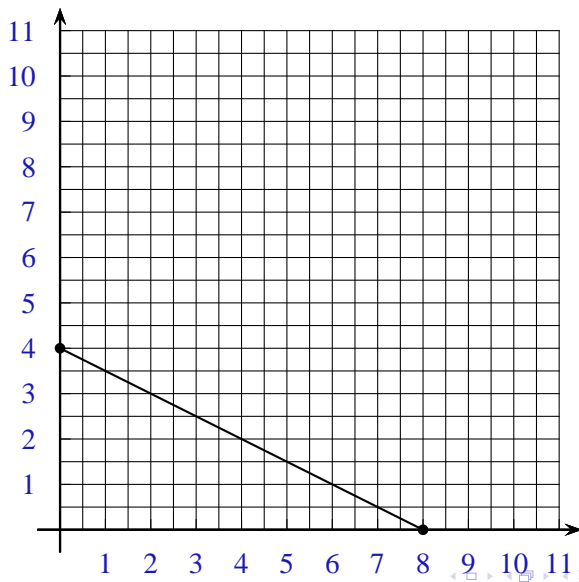
# Un problème de maximisation



# Un problème de maximisation

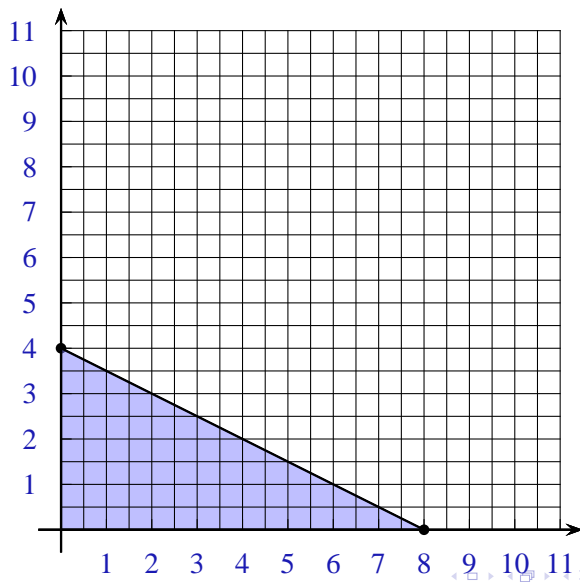


# Un problème de maximisation

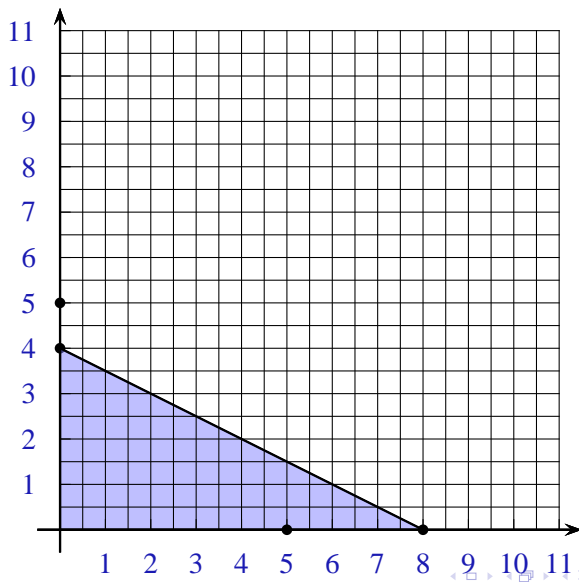




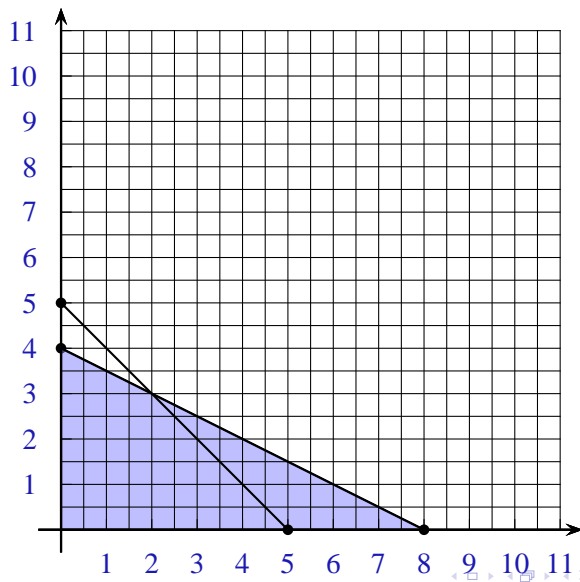
# Un problème de maximisation



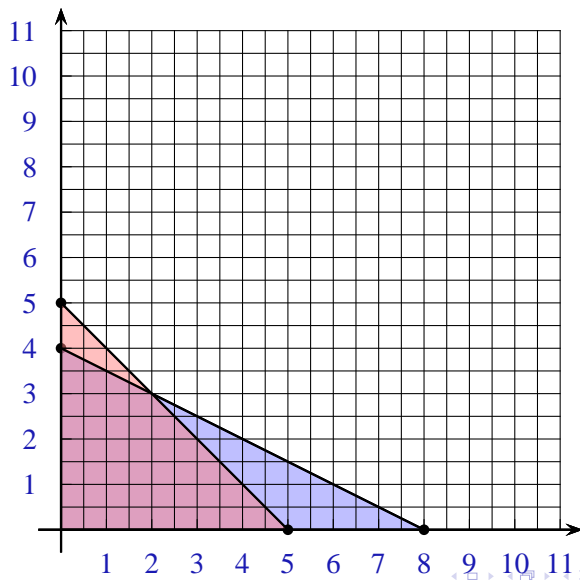
# Un problème de maximisation



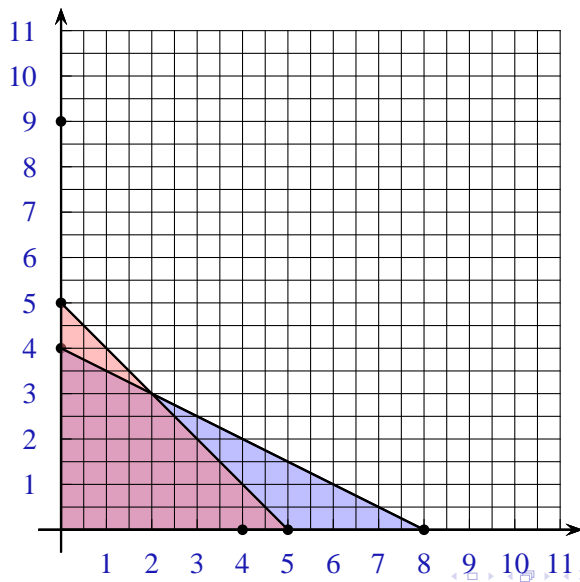
# Un problème de maximisation



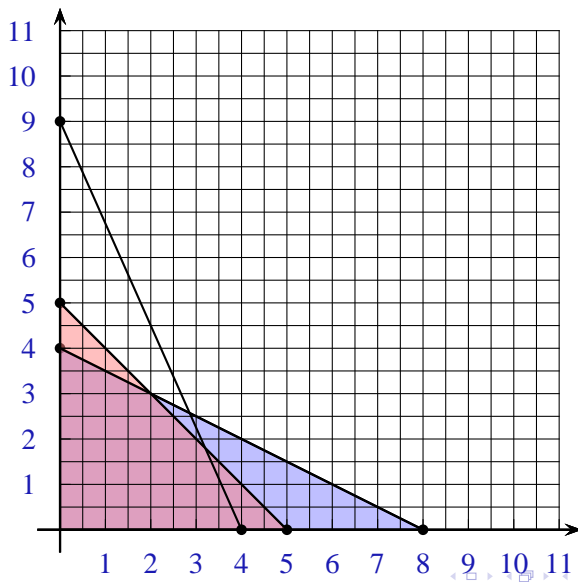
# Un problème de maximisation



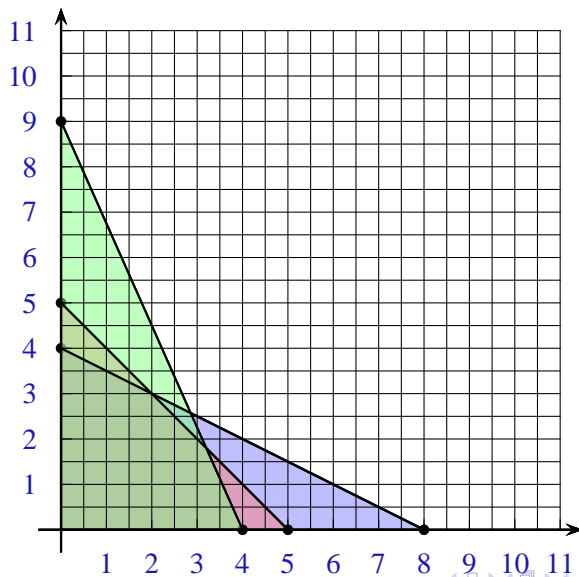
# Un problème de maximisation



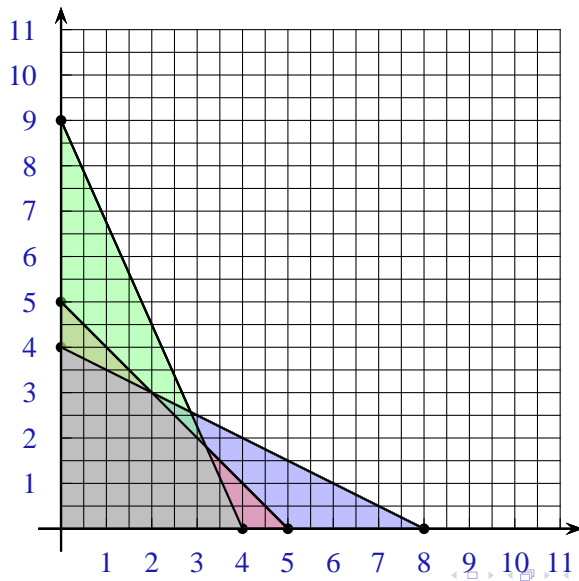
# Un problème de maximisation



# Un problème de maximisation

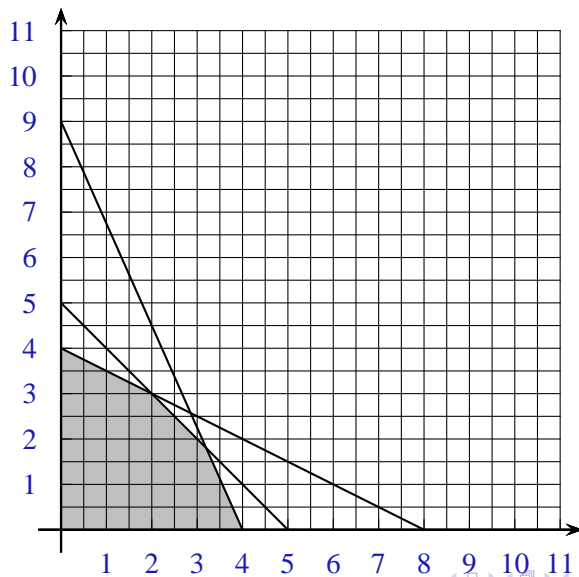


# Un problème de maximisation

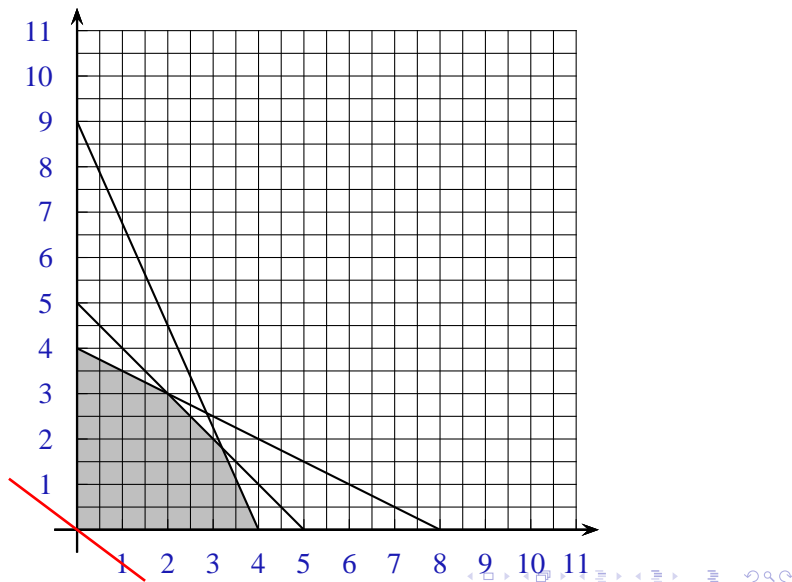




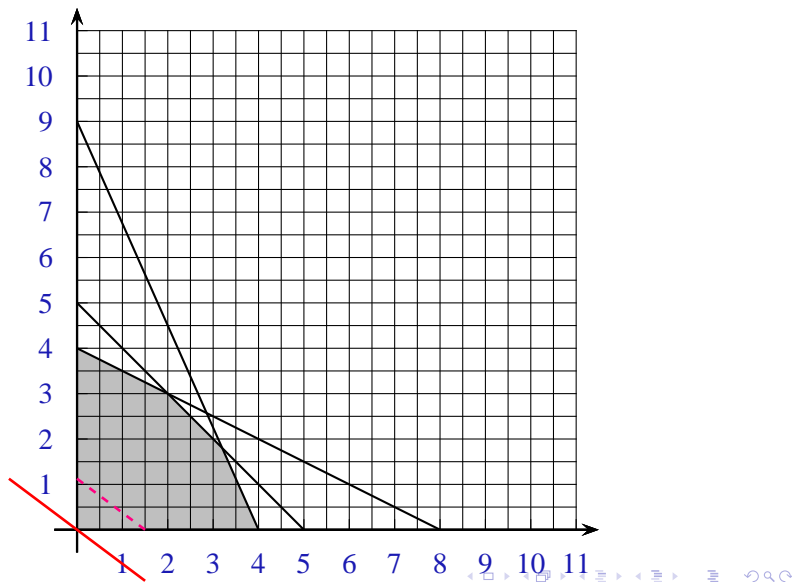
# Un problème de maximisation



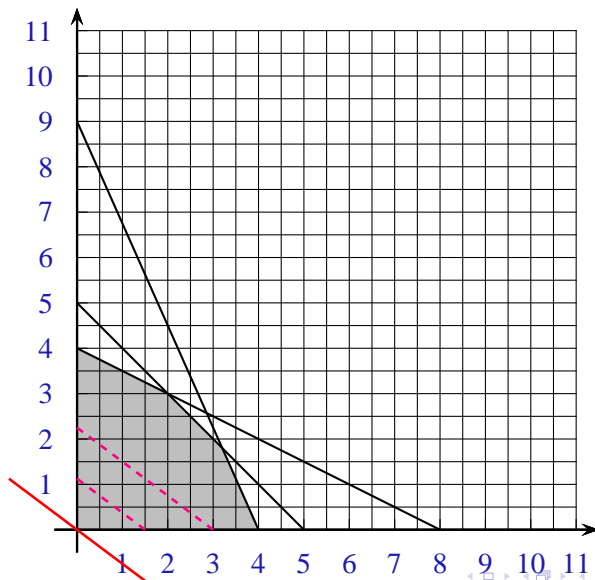
# Un problème de maximisation



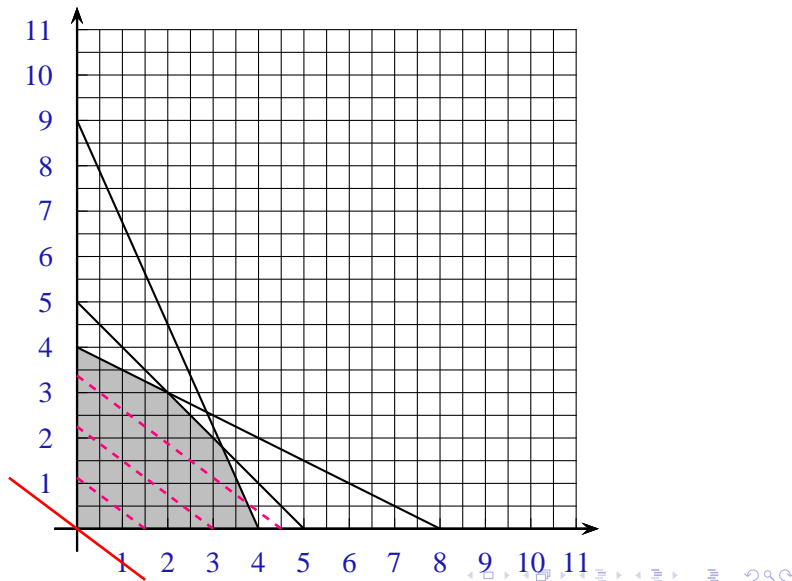
# Un problème de maximisation



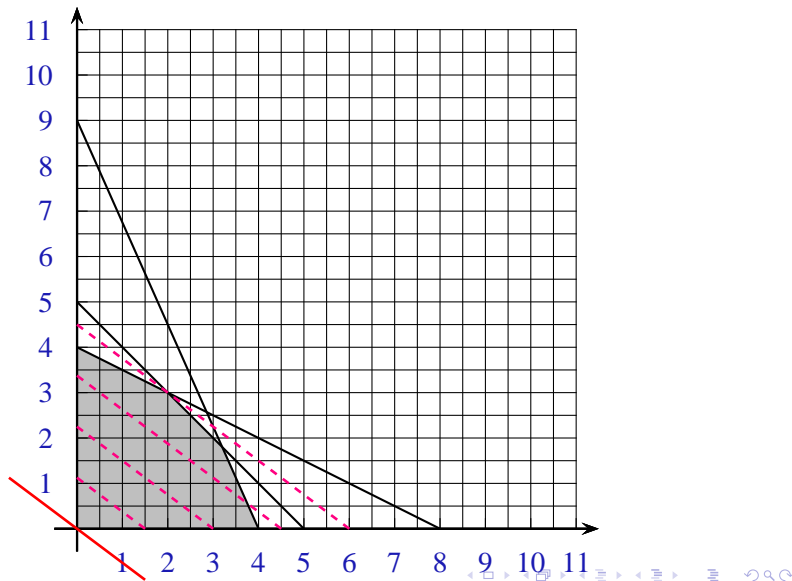
# Un problème de maximisation



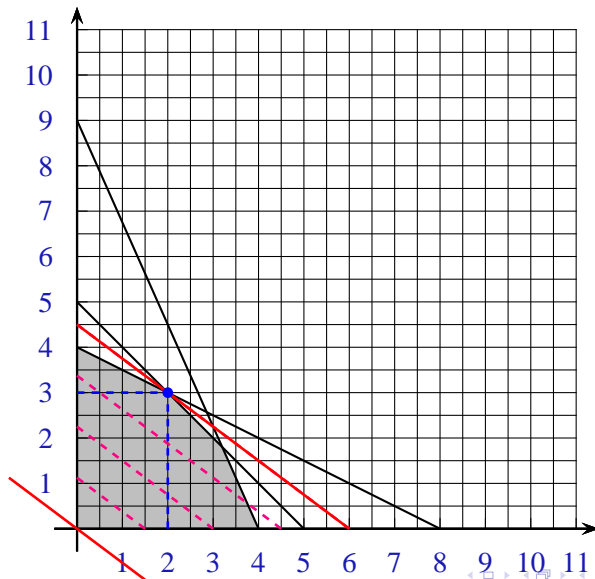
# Un problème de maximisation



# Un problème de maximisation



# Un problème de maximisation



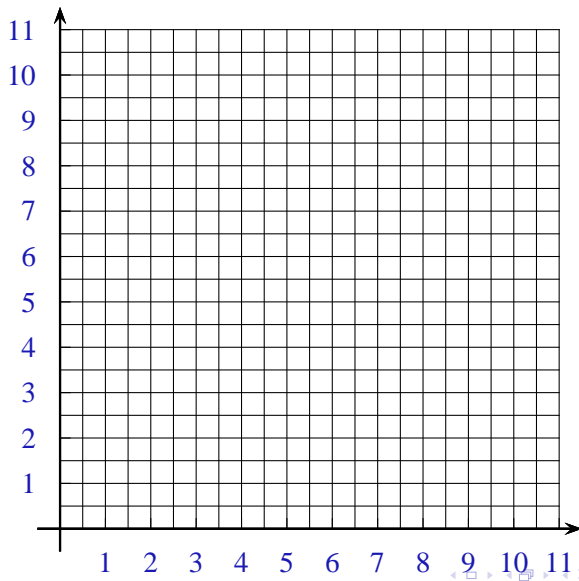
# Un problème de minimisation

**R**eprenons le programme linéaire suivant :

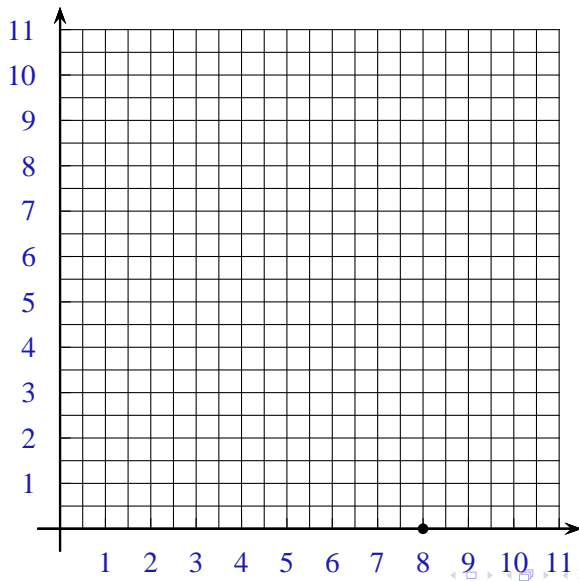
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = 20x_1 + 40x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$



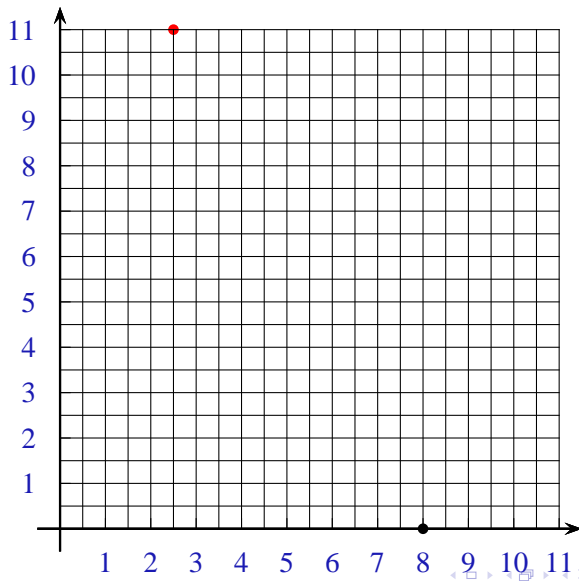
# Un problème de minimisation



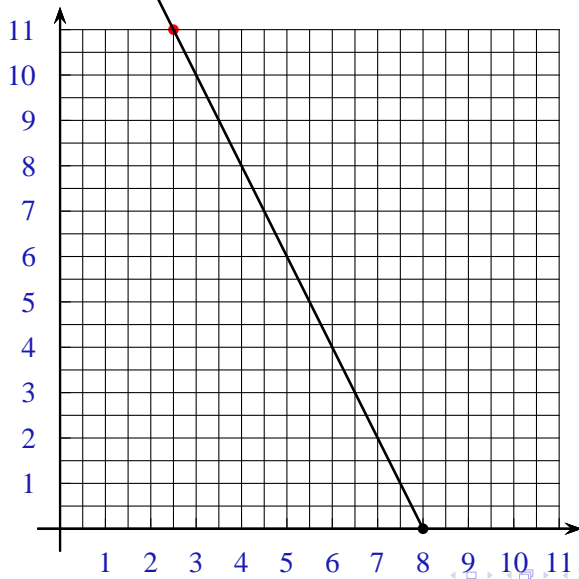
# Un problème de minimisation



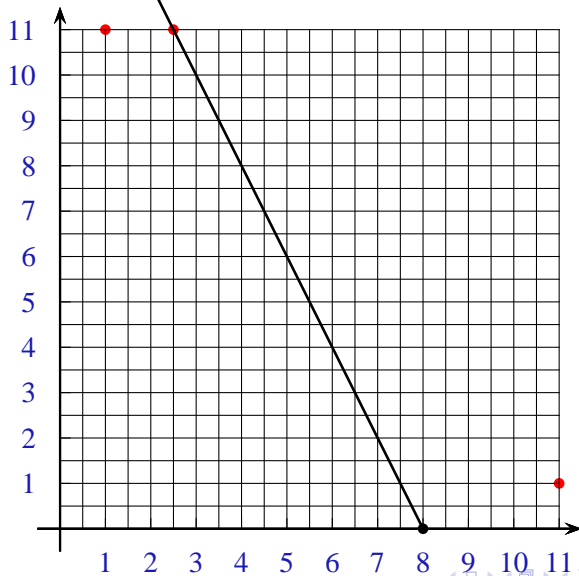
# Un problème de minimisation



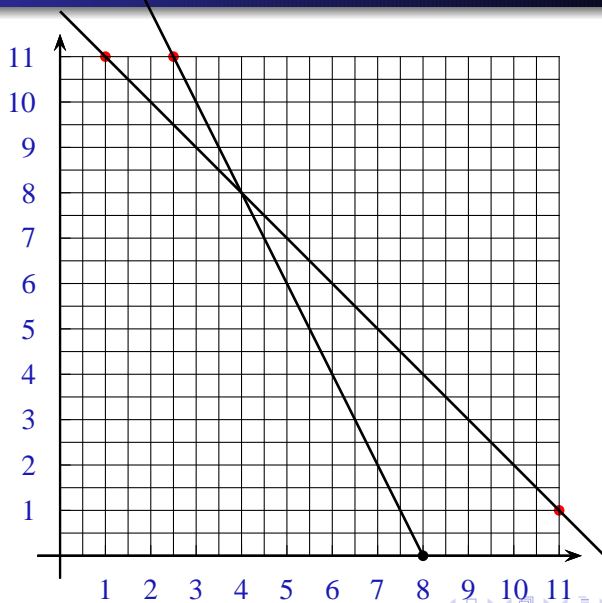
# Un problème de minimisation



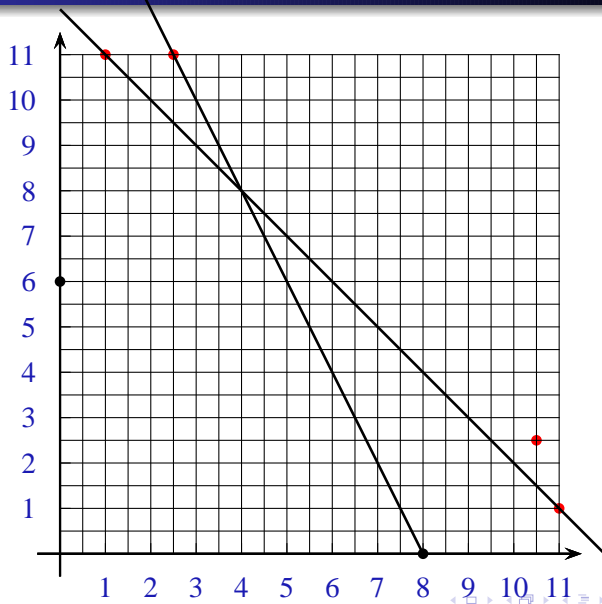
# Un problème de minimisation



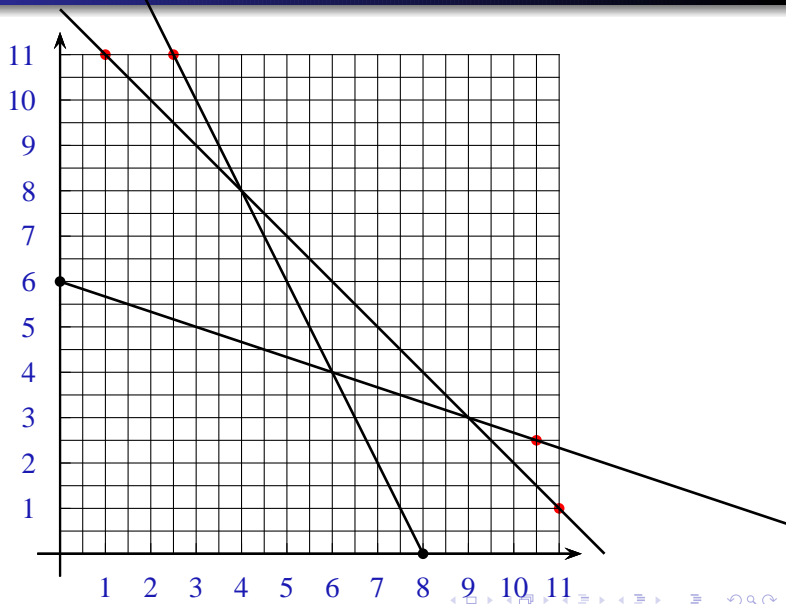
# Un problème de minimisation



# Un problème de minimisation

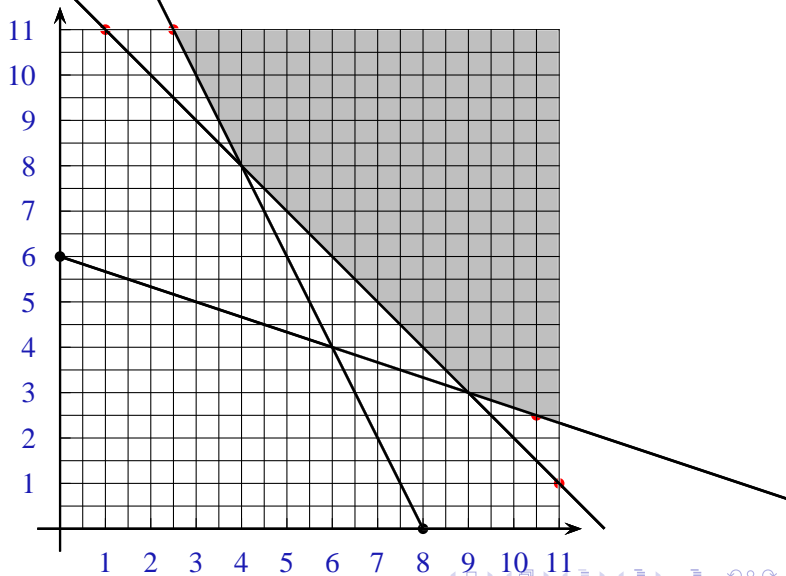


# Un problème de minimisation

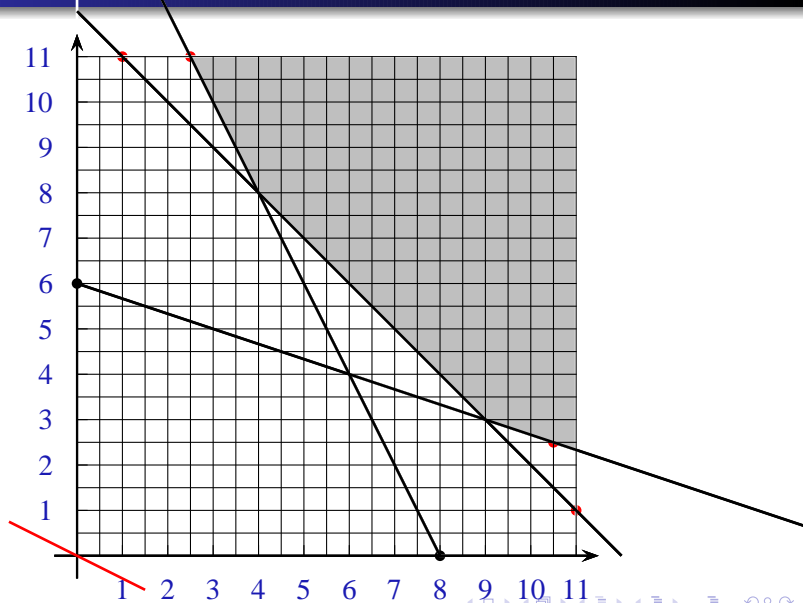




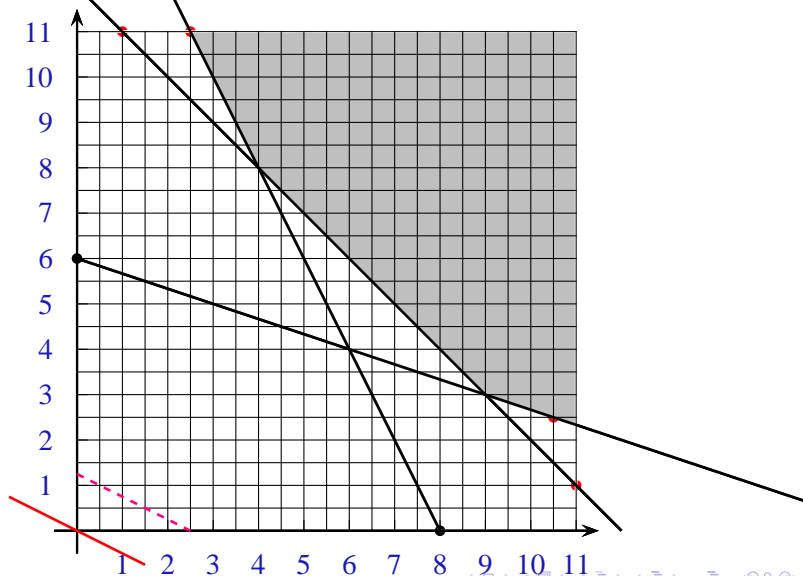
# Un problème de minimisation



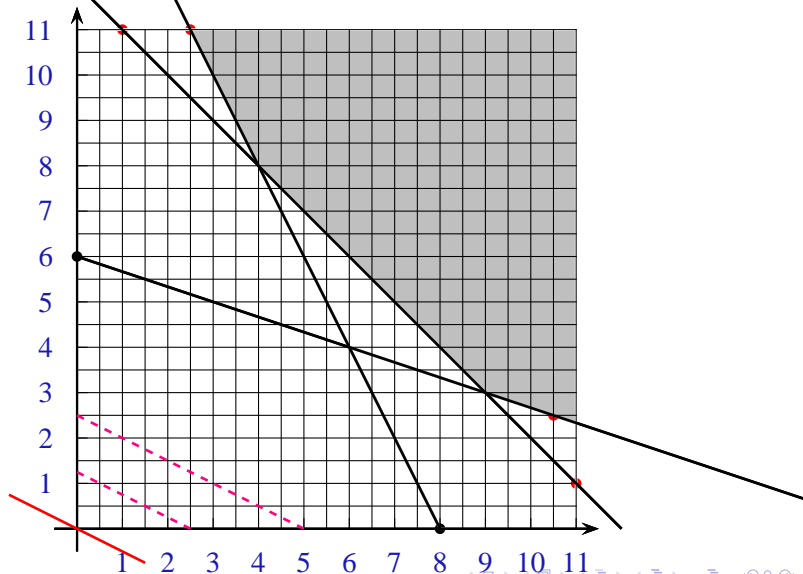
# Un problème de minimisation



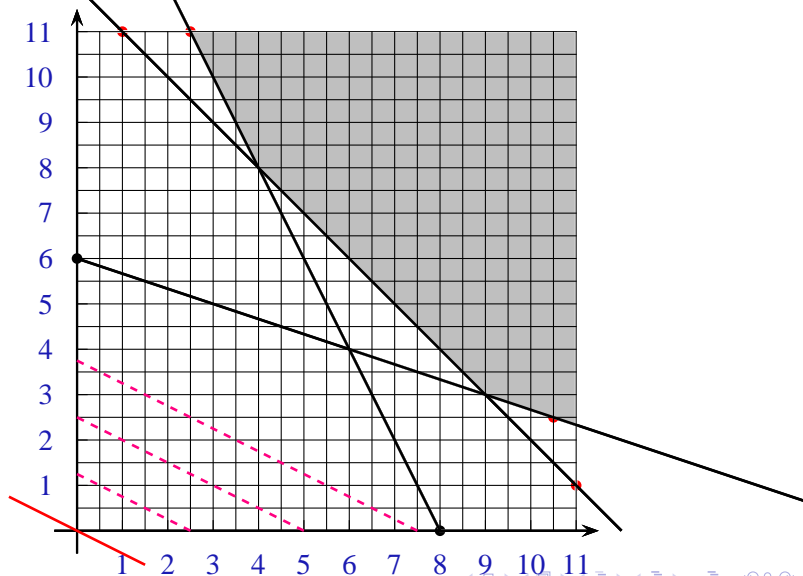
# Un problème de minimisation



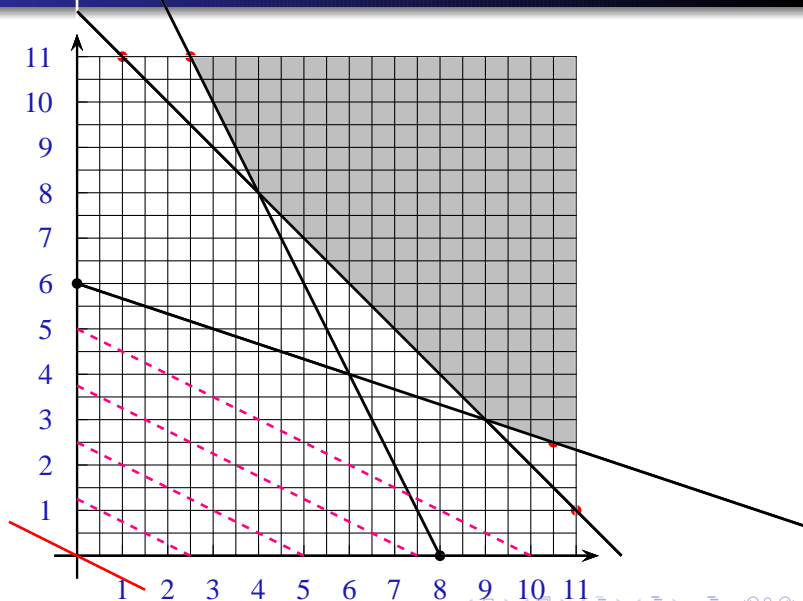
# Un problème de minimisation



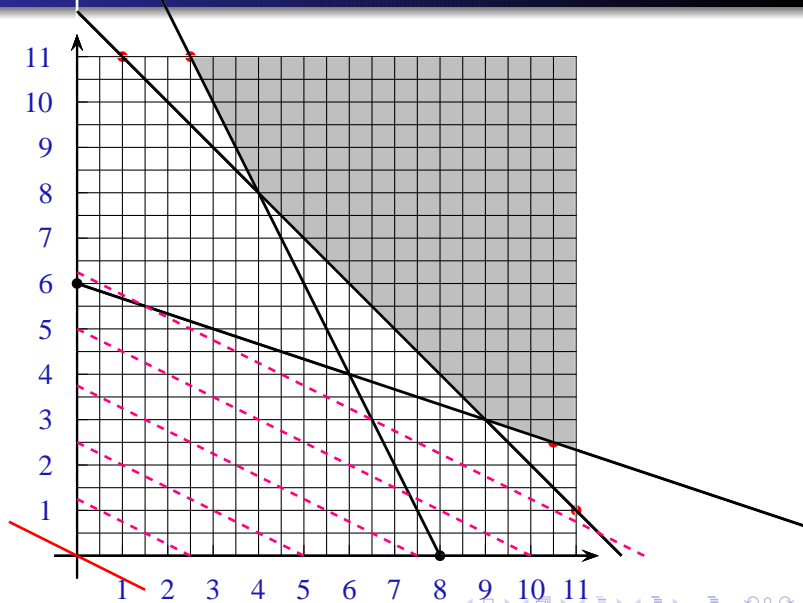
# Un problème de minimisation



# Un problème de minimisation



# Un problème de minimisation

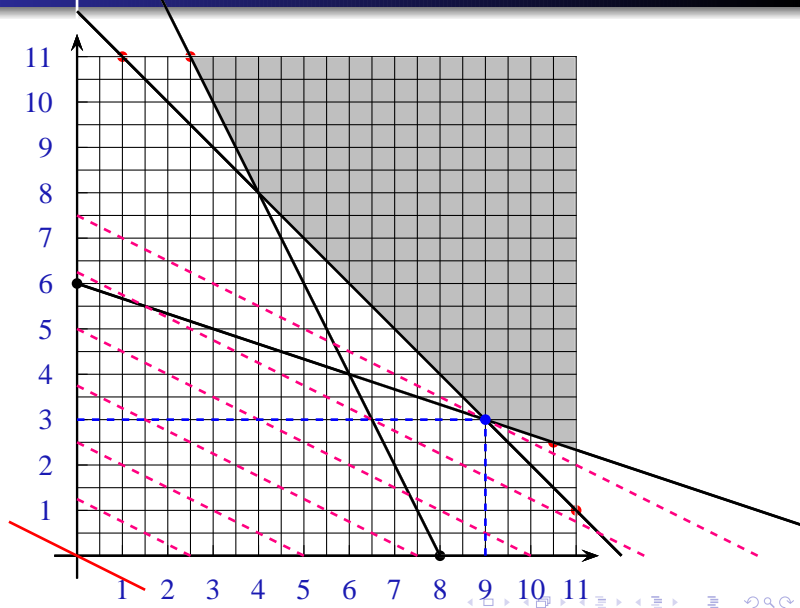


# Un problème de minimisation





# Un problème de minimisation



# Un problème de minimisation

